

Выводиме при от морфизмов катки

Значит сама морфизмов $J_n(k)$ и при $f(x)$ делаются дифференцируемо.

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Получим при $f(J_n(\lambda))$ имеет вид:

$$f(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!} f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix} \cdot t(k)$$

или по морфизмам катки:

$$f(A) = T f(J_n(\lambda)) T^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{pmatrix} \quad f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_n) \end{pmatrix}$$

Глава 5. Геометрия евклидовых пространств

В линейном (векторном) пространстве не только векторы, но и функции, такие как $f(x)$ и $g(x)$, образуют евклидовы пространства.

§1. Евклидовы пространства. Переход к каноническому базису.

Векторы векторного пространства V над полем R или C .

Опр. Внутреннее произведение на евклидовом пространстве — это скалярное произведение, удовлетворяющее следующим условиям:

Опр. Скалярное произведение — это билинейная симметричная форма $\langle x, y \rangle$ на V , удовлетворяющая условиям:

- 1) билинейность: $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$
- 2) симметричность: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 3) положительная определенность: $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Заметим, что скалярное произведение — это билинейная симметричная форма.

Примеры евклидовых пространств

- 1) арифметическое пространство R^n : $x = (x_1, \dots, x_n)$; $y = (y_1, \dots, y_n)$; $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- 2) $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций на $[a, b]$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$

Заметим, что скалярное произведение — это билинейная симметричная форма.

Опр. $x, y \in V \mapsto \langle x, y \rangle \in C$ с билинейным скалярным произведением.

- 1) скалярное произведение (линейность по первому и второму аргументу): $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$
- 2) симметричность: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 3) положительная определенность: $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Заметим, что это скалярное произведение — это билинейная симметричная форма.

Примеры

- 1) арифметическое пространство R^n : $x = (x_1, \dots, x_n)$; $y = (y_1, \dots, y_n)$; $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- 2) $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций на $[a, b]$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$

Опр. Длина или нормат вектора по формуле ск. произ-
 $x \in V \quad |x| = \sqrt{(x, x)}$

Лемма (перво-Кам-Бундасова)

$\forall x, y \in V$ (векторное пространство) $|(x, y)| \leq |x| |y|$
 Равенство имеет место $\Leftrightarrow$ вектора x и y коллинеарны.

Доказ: Если $y=0$, то равенство верно.
 Пусть $y \neq 0$. Разм. вектор $z = x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y$

Тогда $(y, z) = (y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y) = (y, x) - \frac{(x, y)}{(y, y)} (y, y) = 0$

Разм. $0 \leq (z, z) = (x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y) = (x, x) - \frac{(x, y)}{(y, y)} (x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)} (y, x) + \frac{(x, y)^2}{(y, y)^2} (y, y) = (x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)}$

Откуда получаем $|(x, y)| \leq |x| |y|$

Равенство $(x, y) = 0 \Leftrightarrow (z, z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$
 $z = x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y = 0$, т.е. векторы x и y коллинеарны. $\square$

Следствие 1 (перво-Б)

$\forall x, y, z \in V \quad |x+y| \leq |x| + |y| \Rightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

Доказ:

$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

$$|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$\square$

Опр. Нормат δ или норма по формуле $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, где $x \in V$

- 1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (миним. нормат)
- 2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ (неравенство треугольника)
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in V$ и $x \in V$ (линейность нормат)

Свойство 2

Лемма Бундаса: норма δ по V .

Доказ: аналогично доказ 3.

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Если 0 норма, можно задать метрику - метрика x по y :
 $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Пример (с нормой L_1)

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

Пример (с нормой L_2)

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq \|x\| + \|y\|$$

§2. Ортогональные векторы. Грамм-Шмидта

Ор. Векторы $x, y \in V$ наз. ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Процесс Грамм-Шмидта

Если векторы $x_1, \dots, x_k$ попарно ортогональны, то можно

$$| \sum x_i |^2 = \sum |x_i|^2$$

Доказ. по индукции.

$$k=2 \quad |x_1 + x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2(x_1, x_2) = |x_1|^2 + |x_2|^2$$

индукционный шаг

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right|^2 = \left| x_1 + \dots + x_{k-1} + x_k \right|^2 = \left| x_1 + \dots + x_{k-1} \right|^2 + |x_k|^2 + 2(x_1 + \dots + x_{k-1}, x_k) = \left| x_1 + \dots + x_{k-1} \right|^2 + |x_k|^2$$

Утверд.

Пусть V -люб. пр-б. $x, y \in V$, тогда по лемме

$$|(x, y)| \leq |x| |y|$$

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| |y|} \leq 1 \Rightarrow \exists! \varphi \in [0, \pi], \text{ где } \cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}$$

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}$$

След-но, φ наз. углом м/д векторами x и y .

Пусть V -каким-то пр-б

$$0 \leq \frac{|(x, y)|}{|x| |y|} \leq 1 \Rightarrow \exists! \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ где } \cos \varphi = \frac{|(x, y)|}{|x| |y|}$$

$$\cos \varphi = \frac{|(x, y)|}{|x| |y|}$$

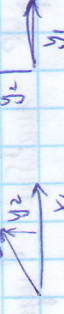
Процесс ортогонализации Грамм-Шмидта

Пусть есть система $y_1, \dots, y_n$ или их векторов $x_1, \dots, x_n$. Хотим систему $y_1, \dots, y_n$ - попарно ортогональных, при этом $\langle x_i, x_m \rangle = \langle y_i, y_m \rangle$ или иначе на координаты, иначе сохраняется.

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 + \alpha y_1 \quad (y_2, y_1) = 0 \Rightarrow (x_2 + \alpha y_1, y_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}$$

$$\text{т.е. } y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$$



Таким образом, y_2 - вектор, ортогональный y_1 .

Аналогично, y_3 - вектор, ортогональный y_1, y_2 .

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}$$

$$(y_k, y_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

$$(x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}, y_i) = 0$$

$$(x_k, y_i) + \alpha_1 (y_1, y_i) + \dots + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_i) = 0$$

т.к. векторы $y_1, \dots, y_{k-1}$ попарно ортогональны, то

$$(x_k, y_i) + \alpha_i (y_i, y_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$(x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})}$$

Теорема (о суу орта. базиса в пространстве)
 В n -мерном пространстве n векторов $e_1, \dots, e_n$ являются базисом тогда и только тогда, когда они линейно независимы.

Доказательство:
 1) Если n векторов $e_1, \dots, e_n$ являются базисом, то они линейно независимы. Предположим обратное, т.е. они линейно зависимы. Тогда существуют коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$. Это означает, что один из векторов можно выразить через остальные, что противоречит определению базиса.

2) Заметим, что любой набор линейно независимых векторов можно расширить до базиса.

Докажем. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — линейно независимые векторы. Если $k = n$, то это уже базис. Если $k < n$, то найдем вектор x_{k+1} , который не лежит в пространстве, натянутом на $x_1, \dots, x_k$.

Пусть $x_1, \dots, x_k$ — линейно независимые векторы. Рассмотрим вектор x_{k+1} , который не лежит в пространстве, натянутом на $x_1, \dots, x_k$. Тогда $x_1, \dots, x_{k+1}$ — линейно независимые векторы. Продолжим этот процесс, пока не получим базис.

Дополним систему $x_1, \dots, x_k$ до базиса, а потом ортогонализуем.

Орт. базис, состоящий из n ортогональных векторов, называют ортонормированным базисом.

Орт. базис или ортонормированный базис — это базис, в котором все векторы имеют единичную длину.

Свойства:
 1) Любой ортонормированный базис — это базис. 2) Любой базис можно ортогонализировать.

3) Любой ортонормированный базис — это базис. 4) Любой базис можно ортогонализировать.

5) Любой ортонормированный базис — это базис. 6) Любой базис можно ортогонализировать.

3.3. Матрица Грама.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — произвольный набор векторов в V .

Определим матрицу $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ (скалярное произведение), $i, j = 1, \dots, n$.

Матрица $G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ называется матрицей Грама системы векторов $e_1, \dots, e_n$.

Если $e_1, \dots, e_n$ — базис V , то G — невырожденная матрица. Если $e_1, \dots, e_n$ — не базис, то G — вырожденная матрица.

Для V — базиса $e_1, \dots, e_n$ матрица G — симметричная, $G^T = G$, $g_{ij} = g_{ji}$. Если $e_1, \dots, e_n$ — не базис, то G — вырожденная матрица.

$(x, x) = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{ij} = (x, x)_G$.

Для L — линейного пространства V матрица G называется симметричной, если $G^T = G$, $g_{ij} = g_{ji}$. Матрица G называется невырожденной, если $\Delta G \neq 0$.

Скалярное произведение $(x, y) = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij} = (x, y)_G$.

Если $e_1, \dots, e_n$ — базис V , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то $(x, y) = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij} = (x, y)_G$.

$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Для линейного пространства V : $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij} = (x, y)_G$.

т.е. запись базиса $e_1, \dots, e_n$ и матрица G определяют скалярное произведение в V .

Если базис ортонормирован, то $G = E$ и скалярное произведение равно: $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

Если матрица Гамильтона

Тогда матрица Гамильтона $G = (g_{ij})$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ и $G^{-1} = -G$.

Тогда $G' = (g'_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ и $G'^{-1} = -G'$.

Это равносильно матричному уравнению $G' = C^T G C$.

В унитарном пространстве $G' = C^T G C$.

Преобразование Гамильтона матрица Гамильтона имеет вид $G' = C^T G C$ и равно $0 \Leftrightarrow$ векторы линейно независимы.

Доказательство: Пусть базис $e_1, \dots, e_n$. Тогда $G e_i = e_i$. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — другой базис. Тогда $G f_i = f_i$.

Тогда $G' = C^T G C$ и $\det G' = (\det C)^2 > 0$.

Если векторы $f_1, \dots, f_n$ — линейно независимы, то они образуют базис. $\Rightarrow \det C \neq 0$.

Если векторы $f_1, \dots, f_n$ — линейно зависимы, тогда, например, $f_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i$. Тогда $G f_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i G f_i$. Тогда $G f_k = 0$.

В-матрица Гамильтона

Гамильтонов куб $\{t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$

Параметризация со сторонами a_i — это

множество $\{t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$

и $n=2$ $G = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$

$\det G = |x^2 - y^2| = |x^2 - y^2| \sin^2 \varphi$

$\det G =$ квадрат площади параллелограмма, построенного на x, y .

$n=3$ $G = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$, можно показать, что $\det G = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$\det G =$ квадрат объема параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z .

Аналогично, определитель Гамильтона $x, y, \dots, v$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах $x, y, \dots, v$.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — ОНБ. f — линейное отображение $f: e_1, \dots, e_n \rightarrow x, y, \dots, v$. Тогда G — матрица линейного отображения, т.е. $[x, y, \dots, v] = [e_1, \dots, e_n] C$. Тогда $G = C^T G' C$, $\det G = (\det C)^2$.

Для линейного отображения f куба параллелепипеда, а именно объема при линейном отображении $= |\det C|$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Если G — матрица Гамильтона, то $G = C^T G' C$ и $\det G = (\det C)^2$.

Теорема

Линейное пространство (векторное пространство) имеет и свойство линейности.

Доказательство: Рассмотрим, что такое векторное пространство V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пусть V - n -мерное векторное пространство. Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $x \in V \rightarrow \varphi(x)$ отображение в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Для этого имеем:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$x_i = (x_i, e_i)$$

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$$

□

§ 5. Ортогональные пространства и нормированные пространства

Пусть $V \subset V'$ - нормированное пространство, $x, y \in V$.

Ортогональное пространство $V^\perp = \{x \in V' \mid x \perp V\}$

$x \perp V$, т.е. x ортогонален каждому вектору $y \in V$.

Означим $V^\perp$ - ортогональное пространство, ортогональное V : $V^\perp$

Лемма

Вектор x ортогонален k -мерному пространству $V_k \iff x \perp V_k$

Доказательство: Пусть $e_1, \dots, e_k$ - базис V_k .

Тогда, $x \perp V_k \iff x \perp e_i, i=1, \dots, k$.

□ $x \perp V_k \implies \forall v \in V_k, v \in V, (x, v) = 0 \implies (x, e_i) = 0, i=1, \dots, k$.

Пусть $(x, e_i) = 0, i=1, \dots, k$.

Тогда $y = y_1 e_1 + \dots + y_k e_k \implies (x, y) = (x, y_1 e_1 + \dots + y_k e_k) = y_1 (x, e_1) + \dots + y_k (x, e_k) = 0$.

Теорема (об ортогональности)

1) $V^\perp$ есть пространство

2) $V = V \oplus V^\perp$

3) $(V^\perp)^\perp = V$

Доказательство:

1) Пусть $x, y \in V^\perp$, то $(x, y) = (y, x) = 0$.

Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = (y, x) = 0$, т.е. $y, x \in V^\perp$.

2) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

3) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

4) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

5) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

6) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

7) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

8) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

9) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

10) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

11) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

12) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

13) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

14) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

15) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

16) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

17) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

18) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

19) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

20) Пусть $x, y \in V^\perp, (x, y) = 0$, т.е. $x, y \in V^\perp$.

3) Пусть $e_1, \dots, e_m$ — ортонормированный базис V_0 .
 Тогда базис V_0 имеет вид: $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ — базис V .
 Тогда $V_0^\perp = \text{span}\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$, т.е. $V_0^\perp \subset V$.
 Тогда $V = V_0 \oplus V_0^\perp$.
 Тогда $\dim V = \dim V_0 + \dim V_0^\perp = m + (n-m) = n$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Ортонормированный базис — ортонормированный базис V_0 .
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.

Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.
 Тогда $V_0^\perp = V_0^\perp$.